3

EXERCICE N°1 : (8 points) :

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique définie par : $U_2 = 2$ et $U_5 = 11$.

1) Calculer U_0 le premier terme de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa raison r.

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = 3n - 4$.

2) On pose : $S_n = U_2 + U_3 + \dots + U_n$; $n \geq 2$.

a) Montrer que : $S_n = \dfrac{3n^2 - 5n + 2}{2}$.

b) Déterminer l'entier naturel n pour que $S_n = 57$.

3) On pose : $A = 2 + 5 + 8 + \dots + 41$.

Calculer A.

4) Soit $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = U_{2n+1} + U_n$.

a) Calculer W_0 et W_1.

b) Montrer que (W_n) est une suite arithmétique.

c) En déduire W_n à l'aide de n.

EXERCICE N°2 : (6 points) :

On donne un segment $[AB]$ avec $AB = 3$ cm et on désigne par $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ les cercles de centres respectifs A et B et de même rayon $R = AB$.

Les cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ se coupent en C et D de façon que ACBD est indirect.

On désigne par r la rotation directe de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

1) Faites un dessin puis montrer que $r(A) = B$ et que $r(\mathcal{C}) = (\mathcal{C}')$.

2) La droite (DA) recoupe $(\mathcal{C})$ en E et la droite (DB) recoupe $(\mathcal{C}')$ en F.

Donner r(E) et r(B).

3) On pose $I = A * B$. La droite passant par C et perpendiculaire à la droite (BF) coupe (BF) **en J et** recoupe $(\mathcal{C}')$ en H.

Montrer que $r(I) = J$ et $r(D) = H$.

4) Soit M un point variable tel que $MA = MD$.

a) Déterminer et construire l'ensemble $(\mathcal{D})$ des points M.

b) Déterminer et construire $(\mathcal{D}') = r\ (\mathcal{D})$.

EXERCICE N°3 : (6 points) :

Pour $x \in [0,\pi]$, on pose : $f(x) = \sqrt{3}.\cos^2 x + 2\sin^2 x.\cos x - \sqrt{3}$.

1) Calculer $f(0)$ et $f(\dfrac{2\pi}{3})$.

2) Montrer que $f(x) = \sin^2 x(2\cos x - \sqrt{3})$ puis résoudre dans $[0,\pi]$ l'équation $f(x) = 0$.

3) Montrer que $f(\pi - x) + f(x) = -2\sqrt{3}.\sin^2 x$.

En déduire le signe de $f(\pi - x) + f(x)$ sur $]0,\pi[$.

4) Soit $\alpha \in [0,\pi]$ tel que : $\tan\alpha = \sqrt{2}$.

Calculer $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ puis calculer $f(\alpha)$.